Glava 5

GALILEJEVE TRANSFORMACIJE

5.1 Proširena Galilejeva grupa

Započećemo odeljak pojmovima inercijalnog koordinatnog sistema i inercijalnog kretanja. Zatim ćemo podsetiti na definiciju Galilejevih transformacija i inverzija, koje zajedno obrazuju proširenu Galilejevu grupu. Koren ove grupe leži, s jedne strane, u geometriji prostor-vremena i u inercijalnom kretanju, a s druge strane u Galilejevom principu relativiteta. Objasnićemo aktivnu i pasivnu interpretaciju pojedinih transformacija. Pripremajući se za kvantizaciju proširene Galilejeve grupe, tj. za njeno prenošenje u kvantnu mehaniku (koje ćemo izvršiti u sledećem odeljku), ukazaćemo na mogućnost generisanja Galilejevih transformacija pomoću eksponencijalnih operatorskih funkcija zasnovanih na Poisson-ovim zagradama. Na kraju, definisaćemo dotične transformacije u više prostora i proučićemo veze između njih.

5.1.1 * Inercijalni koordinatni sistem

Klasična mehanika je nauka o kretanju fizičkih sistema. Pri opisivanju kretanja se zapravo radi o tome kako određeni posmatrač (opserver) vidi dotični fizički sistem u prostoru i vremenu.

Fizika je egzaktna nauka, te se pojam "posmatrača" mora precizno i objektivno definisati. Tako se dolazi do poznatog pojma *koordinatnog* ili *referentnog sistema*. Strogo uzev, posmatrač je više od koordinatnog sistema; tu je i aktivni subjekat (ali mogao bi biti i robot) koji vrši merenja, prikuplja informaciju itd. Ali uobičajeno je da se ovaj "višak" apstrahuje i, za potrebe klasične mehanike, posmatrač redukuje na referentni sistem.

Ista fizička pojava izgleda različito u različitim koordinatnim sistemima i čak može da se ispoljava složenije ili prostije zavisno od referentnog sistema. Očigledno je važno naći kriterijum najpogodnijeg izbora koordinatnog sistema za što širu klasu fizičkih fenomena.

Fizičke pojave odvijaju se u prostoru i vremenu. Složenost opisivanja pojava osetno zavisi od toga kako se složeno pojavljuje sam prostor i vreme u viđenju opservera. Vreme poprima najveću jednostavnost za posmatrača za koga su svi vremenski trenuci *a priori* (tj. pre nego što se dese određeni fizički događaji) ravnopravni, nerazličivi. Ta se osobina naziva *homogenošću vremena*. Analogna jednostavnost prostora je u *a priori* ravnopravnosti ili nerazličivosti svih položaja — što se naziva *homogenošću prostora*. Drugi vid jednostavnog ispoljavanja prostora imamo ako su u njemu svi pravci koji prolaze kroz fiksiranu tačku ravnopravni — što se naziva *izotropnošću* *prostora* (u odnosu na tu tačku). (Videti precizniju definiciju homogenosti i izotropnosti u § 5.1.7.) Ako je prostor homogen i izotropan u odnosu na jednu tačku, onda je izotropan u odnosu na svaku tačku.

Koordinatni sistem u kome je vreme homogeno, a prostor homogen i izotropan naziva se *inercijalnim koordinatnim sistemom*. Takav referentni sistem stvarno daje najjednostavnije opisivanje najvećeg broja pojava. Pre svega, u njemu se materijalna tačka na koju ne deluje sila[5.1.1], kreće pravolinijski konstantnom brzinom (ili u specijalnom slučaju miruje), tj. vrši tzv. *inercijalno kretanje*. Ovo je u stvari potreban i dovoljan uslov (ili druga definicija) za inercijalni referentni sistem.

Inercijalnih koordinatnih sistema ima (kontinualno beskonačno) mnogo. Sa jednog na drugi prelazi se transformacijom iz tzv. proširene Galilejeve grupe, koja je stoga grupa relativiteta klasične mehanike (videti § 5.1.7).

5.1.2 Galilejeve transformacije

Kao što je poznato u klasičnoj mehanici, svaka tzv. *Galilejeva transformacija* određena je sa 4 entiteta: jednom 3×3 realnom ortogonalnom[5.1.2] matricom R jedinične determinante (koja se naziva matricom rotacije), vektorom brzine $\mathbf{v}$, vektorom prostorne translacije $\mathbf{a}$ i realnim brojem vremenske translacije b. Oznaka je $T_{(b,\mathbf{a},\mathbf{v},R)}$.

Galilejeva transformacija deluje na sledeći način na vektor položaja $\mathbf{r}$, na trenutak t i na impuls $\mathbf{p}$ klasične čestice:

$$T_{(b,\mathbf{a},\mathbf{v},R)}\mathbf{r} = R\mathbf{r} + \mathbf{a} - \mathbf{v}t, \quad T_{(b,\mathbf{a},\mathbf{v},R)}t = t + b, \quad T_{(b,\mathbf{a},\mathbf{v},R)}\mathbf{p} = R\mathbf{p} - m\mathbf{v}. \qquad (5.1.1a,b,c)$$

Pod $R\mathbf{r}$, na primer, podrazumeva se matrični proizvod 3×3 matrice R sa 3×1 matricom (ili brojnom kolonom) vektora $\mathbf{r}$, koja se sastoji od apscise x, ordinate y i od aplikate z. Sa m je označena masa čestice.

Zadatak 5.1.1 Pokazati da identična transformacija glasi $T_{(0,\mathbf{0},\mathbf{0},I)}$, gde je sa $\mathbf{0}$ označen nulti vektor, a sa I jedinična 3×3 matrica.

Kada su u četvorci $(b, \mathbf{a}, \mathbf{v}, R)$ svi entiteti nulti (zapravo $R = I$ a ne nula) osim jednog, onda se u oznaci transformacije ispisuje samo taj jedan.

Zadatak 5.1.2 Pokazati da važi

$$T_{(b,\mathbf{a},\mathbf{v},R)} = T_b T_{\mathbf{a}} T_{\mathbf{v}} T_R, \qquad (5.1.2)$$

gde na DS-i imamo proizvod transformacija, koji se u stvari sastoji u uzastopnoj primeni.

Četvorka $(b, \mathbf{a}, \mathbf{v}, R)$ naziva se *Lie-jevim parametrima* transformacije. Za svaki izbor Lie-jevih parametara (unutar gornjih definicija) postoji Galilejeva transformacija. Uzastopna primena (proizvod) bilo koje dve Galilejeve transformacije opet daje Galilejevu transformaciju prema obrascu

$$T_{(b',\mathbf{a}',\mathbf{v}',R')}T_{(b,\mathbf{a},\mathbf{v},R)} = T_{(b'+b,\mathbf{a}'+R'\mathbf{a}-\mathbf{v}'b,\mathbf{v}'+R'\mathbf{v},R'R)}. \qquad (5.1.3)$$

[5.1.1] Ovde pod silom podrazumevamo pravu silu, koja ima svoj izvor u nekom fizičkom sistemu i za koji važi zakon akcije i reakcije (a ne na inercijalnu silu, koja je prividna i pojavljuje se samo u neinercijalnom koordinatnom sistemu).

[5.1.2] Matrica R se naziva ortogonalnom ako $R^{-1} = R^T$, tj. ako je njena inverzna matrica jednaka transponovanoj.

Svaka Galilejeva transformacija je nesingularna (tj. predstavlja obostrano jednoznačno, ceo-na-ceo preslikavanje). Inverzna transformacija $T^{-1}_{(b,\mathbf{a},\mathbf{v},R)}$ proizvoljne trensformacije $T_{(b,\mathbf{a},\mathbf{v},R))}$, kao što je poznato, zadovoljava

$$T^{-1}T = TT^{-1} = T_{(0,\mathbf{0},\mathbf{0},I)} \tag{5.1.4}$$

(na LS-i smo izostavili Lie-jeve parametre).

Zadatak 5.1.3 Dokazati formulu

$$T^{-1}_{(b,\mathbf{a},\mathbf{v},R)} = T_{(-b,-R^{-1}(\mathbf{a}+\mathbf{v}b),-R^{-1}\mathbf{v},R^{-1})}. \tag{5.1.5}$$

Čitaocu je već očigledno da Galilejeve transformacije čine grupu. To je tzv. *Galilejeva grupa*, obeležavaćemo je sa $\mathcal{G}$. Pošto su elementi grupe zadati Lie-jevim parametrima i množenje u grupi se izražava pomoću operacija sa Lie-jevim parametrima (uporediti (5.1.3)), Galilejeva grupa spada među tzv. Lie-jeve grupe.

5.1.3 Osnovne podgrupe Galilejeve grupe

Na DS-i jednakosti (5.1.2) pojavljuju se prosti specijalni slučajevi Galilejevih transformacija. Transformacije T_R nazivaju se rotacijama, $T_\mathbf{v}$ *boost*-ovima (*boost* — čitati: bust — na engleskom znači: pogurnuti uvis) ili specijalnim Galilejevim transformacijama, T_b vremenskim translacijama, a $T_\mathbf{a}$ prostornim translacijama. Uobičajene su oznake

$$\mathrm{R}(3) \overset{\text{def}}{=} \{T_R \mid \forall R\},\ \mathrm{T}_3^{(v)} \overset{\text{def}}{=} \{T_\mathbf{v} \mid \forall \mathbf{v}\}, \tag{5.1.6a,b}$$

$$\mathrm{T}_3 \overset{\text{def}}{=} \{T_\mathbf{a} \mid \forall \mathbf{a}\},\ \mathrm{T}_1 \overset{\text{def}}{=} \{T_b \mid -\infty < b < \infty\}. \tag{5.1.6c,d}$$

Zadatak 5.1.4 Pokazati da su skupovi $\mathrm{R}(3)$, $\mathrm{T}_3^{(v)}$, T_3 i T_1 grupe.

Dakle, rotaciona grupa $\mathrm{R}(3)$, grupa specijalnih Galilejevih transformacija $\mathrm{T}_3^{(v)}$, grupa prostornih translacija T_3 i grupa vremenskih translacija T_1 su *osnovne podgrupe* od $\mathcal{G}$. Broj koji se pojavljuje u oznaci podgrupe pokazuje koliki je broj Lie-jevih parametara podgrupe. Neočigledno je samo da je $\mathrm{R}(3)$ troparametarska. U to ćemo se uveriti u narednoj glavi.

Od velike je važnosti najmanja podgrupa od $\mathcal{G}$ koja sadrži samo $\mathrm{R}(3)$ i T_3 od osnovnih podgrupa. To je tzv. *Euklidova grupa* $\mathrm{E}(3)$. (Ovde se broj 3 odnosi na dimenziju prostora u kome deluju transformacije. Broj Lie-jevih parametara je 6.)

Cela Galilejeva grupa $\mathcal{G}$, kao i svaka njena pomenuta podgrupa, je kao što se kaže, *kontinualna* (neprekidna) i povezana. To će reći da se kontinualnim menjanjem Lie-jevih parametara dotične transformacije može stići (prelazeći druge Galilejeve transformacije) do identične transformacije $T_{(0,\mathbf{0},\mathbf{0},I)}$. Sa suprotnim slučajem diskretnih transformacija upoznaćemo se u sledećem paragrafu.

5.1.4 Diskretne transformacije i proširena Galilejeva grupa

Inverzija prostora ili *prostorna inverzija* $\mathcal{J}_p$ definisana je sledećim delovanjem

$$\mathcal{J}_p\mathbf{r} \stackrel{\text{def}}{=} -\mathbf{r}, \quad \mathcal{J}_p t \stackrel{\text{def}}{=} t, \quad \mathcal{J}_p\mathbf{p} = -\mathbf{p}. \tag{5.1.7a,b,c}$$

Inverzija vremena ili *vremenska inverzija* $\mathcal{J}_v$ je po definiciji sledeća transformacija:

$$\mathcal{J}_v\mathbf{r} = \mathbf{r}, \quad \mathcal{J}_v t \stackrel{\text{def}}{=} -t, \quad \mathcal{J}_v\mathbf{p} = -\mathbf{p}. \tag{5.1.8a,b,c}$$

Za obe inverzije se često kaže da su *diskretne* transformacije. Naime, uopšte nemaju Lie-jeve parametre i, stoga se, na prvi pogled, ne može od njih kontinualno stići do druge transformacije. Međutim, detaljna analiza pokazuje da stvari stoje malo drugačije.

Najmanja podgrupa grupe svih transformacija (faznog prostora i vremenske ose materijalne tačke) koja pored $\mathcal{G}$ sadrži i $\mathcal{J}_p$ i $\mathcal{J}_v$ naziva se *proširenom Galilejevom grupom.* Obeležavaćemo je sa $\overline{\mathcal{G}}$. Označavajući sa T tekuću Galilejevu transformaciju, može se reći da se $\overline{\mathcal{G}}$ sastoji od 4 vrste transformacija; od Galilejevih transformacija T, od transformacija vida $T\mathcal{J}_p$, od transformacija koje se pišu kao $T\mathcal{J}_v$ i, najzad, od transformacija koje glase $T\mathcal{J}_p\mathcal{J}_v$. Diskretna transformacija $\mathcal{J}_p\mathcal{J}_v$ je tzv. *jaka inverzija.* Cela proširena Galilejeva grupa $\overline{\mathcal{G}}$ je unija četiri disjunktna skupa:

$$\overline{\mathcal{G}} = \mathcal{G} + \mathcal{G}\mathcal{J}_p + \mathcal{G}\mathcal{J}_v + \mathcal{G}\mathcal{J}_p\mathcal{J}_v.$$

Svaki sabirak (podskup u $\overline{\mathcal{G}}$) naziva se susednom klasom u teoriji grupa. Svaka od pomenute četiri susedne klase je povezana, tj. neprekidnom promenom Lie-jevih parametara (od T) može se preći sa bilo kog elementa na bilo koji drugi u istoj klasi. Ali grupa $\overline{\mathcal{G}}$ nije povezana.

U sledećem paragrafu prodiskutovaćemo dvostruku fizičku interpretaciju transformacija iz $\overline{\mathcal{G}}$.

5.1.5 * Aktivna i pasivna interpretacija transformacija iz T_3, T_1 i $\mathrm{T}_3^{(v)}$

Svim transformacijama koje smo diskutovali u prethodnim paragrafima može se dati tzv. *aktivna interpretacija*, u kojoj se pretpostavlja da je fiksiran koordinatni sistem (uključujući nulti trenutak vremena), tj. da je referentni sistem jedan te isti pre i posle delovanja transformacije. U ovoj interpretaciji se zamišlja da se transformacije "dešavaju" u objektivnom fizičkom prostor-vremenu[5.1.3], a transformacije iz prethodnih paragrafa opisuju kako takvu promenu vidi dati posmatrač (ograničavamo se, naravno, na inercijalnog posmatrača).

Međutim, moguća je i druga, tzv. *pasivna interpretacija* transformacija iz $\mathcal{G}$. Tu se pretpostavlja da se u objektivnom prostor-vremenu ništa ne "dešava" sa fizičkim sistemima, ali da postoje dva različita koordinatna sistema i da se drugi dobija iz prvog inverznom transformacijom $T^{-1} \in \mathcal{G}$ u objektivnom prostor-vremenu. Primena transformacije T na $\mathbf{r}$, $\mathbf{p}$, t se onda tumači kao preslikavanje ili prevođenje viđenja fenomena od strane prvog posmatrača u viđenje

[5.1.3] Objektivni prostor, za razliku od subjektivnog prostora brojnih kolona $\mathbf{r}$ kojim se služi posmatrač, u klasičnoj fizici se obično ne definiše matematički precizno. Pre nego što se fiksira koordinatni sistem, to nije linearni prostor, već samo tzv. afini prostor, čiji je jedini element strukture rastojanje. Čitalac, ako želi, može da pročita više o matematičkoj strukturi afinog prostora u poslednjoj glavi knjige: А. Т. Мальъцев, *Основы Линейной Алгебры* (Наука, Москва 1975), treće, prerađeno izdanje, Nauka, Moskva, 1970 (u ranijim izdanjima nema ove partije).

istih fenomena od strane drugog posmatrača. Pod "viđenjem" ovde podrazumevamo odražavanje objektivnih događaja u subjektivnom faznom prostoru i vremenu posmatrača pripisivanjem po 7 realnih brojeva $\mathbf{r}$, $\mathbf{p}$, t tim događajima.

Očigledan je smisao prostornih translacija u aktivnoj interpretaciji. Pri pasivnoj interpretaciji prostornih translacija pretpostavlja se da je koordinatni početak drugog posmatrača (i samo to) pomeren za $-\mathbf{a}$ u odnosu na koordinatni početak prvog; prema tome, položaj koji prvom posmatraču izgleda da je u vrhu radijus-vektora $\mathbf{r}$, drugom posmatraču izgleda da je u vrhu radijus-vektora $\mathbf{r} + \mathbf{a}$.

Moguće su dve aktivne interpretacije vremenskih translacija. U prvoj, koju ćemo nazivati *nespontanom*, po uzoru na aktivnu interpretaciju prostornih translacija, opserver vrši — bar u mislima — translaciju vremena po objektivnoj apsolutnoj vremenskoj osi kada to zaželi i za veličinu b koju odabere. U drugoj aktivnoj interpretaciji, koju ćemo nazivati *spontanom*, radi se o spontanom i nezaustavivom proticanju vremena u prirodi, koje se ogleda u vremenskoj evoluciji svih fizičkih sistema.

U pasivnoj interpretaciji vremenskih translacija pretpostavljamo da je nulti trenutak drugog posmatrača (i samo to) pomeren za $-b$ u odnosu na nulti trenutak prvog posmatrača.

Specijalnim Galilejevim transformacijama možemo dati aktivnu interpretaciju po kojoj svaka materijalna tačka (ma gde se nalazila) u trenutku $t = 0$ skokom promeni svoju brzinu za fiksirani vektor $-\mathbf{v}$. Ovo je, naravno, matematička konstrukcija bez dubljeg fizičkog smisla.

Kada dajemo pasivnu interpretaciju *boost*-ovima, onda pretpostavljamo da se u trenutku $t = 0$ koordinatni sistem 2 poklapao sa koordinatnim sistemom 1 u položaju, smerovima i orijentaciji koordinatnih osa (oba su desna ili oba leva, videti Crtež C 5.1 niže), kao i u izboru nultog trenutka, ali da se referentni sistem 2 kretao u odnosu na referentni sistem 1 konstantnom brzinom $\mathbf{v}$.

Čitalac je svakako zapazio da "dešavanje" pišemo u navodnicima. Razlog tome leži u činjenici što su sva navedena preslikavanja kojima aktivno interpretiramo transformacije iz $\overline{\mathcal{G}}$ u stvari fiktivna; možemo ih samo zamisliti, a ne i fizički ostvariti. Ovo nije slučaj sa svim pasivnim interpretacijama, osim za boost-ove, i sa spontanom aktivnom interpretacijom vremenske translacije. (Tu se radi o ostvarivim dešavanjima.)

5.1.6 Aktivna i pasivna interpretacija rotacija i inverzija

Što se rotacija tiče, one se interpretiraju aktivno ili pasivno u analogiji sa slučajem translacija. Prepustićemo detalje čitaocu.

Prodiskutovaćemo matematičku stranu nerazličivosti aktivne i pasivne interpretacije. Zamislimo objektivni prostor (matematički: apstraktni prostor) u kome je fiksiran koordinatni sistem (bazis) $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$ i neka tu deluje rotacija $\hat{R}$. Poznata formula za reprezentovanje rotacije $\hat{R}$ matricom R u pomenutom bazisu glasi

$$\hat{R}\mathbf{a}_k = \sum_{k'=1}^{3} R_{k'k}\mathbf{a}_{k'}. \tag{5.1.9}$$

Trojka brojeva $\mathbf{r}$ u istom bazisu reprezentuje tekuću tačku objektivnog prostora, a $R\mathbf{r}$ reprezentuje lik te tačke dobijen delovanjem rotacije $\hat{R}$. To je aktivna interpretacija.

Uzmimo sad inverznu od gornje rotacije, tj. $\hat{R}^{-1}$, u objektivnom prostoru i pomoću nje generišimo drugi bazis:

$$\mathbf{b}_k \stackrel{\text{def}}{=} \hat{R}^{-1}\mathbf{a}_k,\ k = 1,2,3. \tag{5.1.10}$$

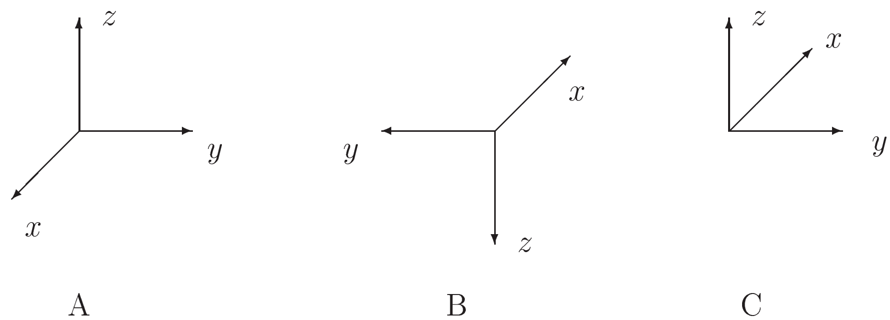
Iz (5.1.9) i (5.1.10) sledi

$$\mathbf{b}_k = \sum_{k'=1}^{3} R^{-1}_{k'k}\mathbf{a}_{k'}, \tag{5.1.11}$$

što znači da je matrica razvoja drugog bazisa po prvom $(R^{-1})^T$ (T znači transponovanje), tj. kontragredijentna matrica od R. Onda, kao što je poznato, ako tačku objektivnog prostora u prvom bazisu $\{\mathbf{a}_k \mid k = 1,2,3\}$, reprezentuje brojna kolona $\mathbf{r}$, istu tačku u drugom bazisu $\{\mathbf{b}_k \mid k = 1,2,3\}$ reprezentuje brojna kolona $R\mathbf{r}$. To je pasivna interpretacija.

Zadatak 5.1.5 Pokazati da je $\mathcal{J}_p$, što se tiče delovanja na $\mathbf{r}$, takođe matrica 3×3. Koja je to matrica?

Za prostornu inverziju $\mathcal{J}_p$ važi sve što je rečeno za rotacije. Proučićemo detaljnije fizičku stranu dveju interpretacija za $\mathcal{J}_p$.



Slika 5.1: **Levi i desni koordinatni sistem**.

U slučaju pasivne interpretacije prostorne inverzije prelazi se sa jednog, npr. sa uobičajenog desnog koordinatnog sistema, na drugi, na primer na levi (videti Crtež C 5.1.A odnosno C 5.1.B). Obratiti pažnju da su ortovi desnog referentnog sistema uzajamno raspoređeni (orijentisani) po uzoru na desni (tj. uobičajeni) zavrtanj: vrtenje od orta x-ose najmanjim uglom ka ortu y-ose izazivalo bi pomeranje zavrtnja u smeru orta z-ose. Kod levog koordinatnog sistema *mutatis mutandis* uzor je levi zavrtanj.

Zadatak 5.1.6 Uveriti se da se levi i desni koordinatni sistem ne mogu dobiti rotacijom jedan iz drugog, a da se dva leva koordinatna sistema sa istim početkom (npr. C 5.1.B i C 5.1.C) mogu.

U aktivnoj interpretaciji prostorna inverzija se u stvari odigrava u objektivnom prostoru (matematički: u apstraktnom prostoru) i deluje na sve osim na fiksirani koordinatni sistem opservera. Pasivna interpretacija je izvodljiva: možemo preći sa opisivanja fenomena iz desnog koordinatnog sistema na opisivanje iz levog ili obratno.

5.1.7 * Inercijalni koordinatni sistemi i proširena Galilejeva grupa kao grupa relativiteta

Kao što smo rekli u paragrafu § 5.1.1, inercijalni koordinatni sistem može da se prepozna po tome što materijalna tačka koja se kreće po inerciji ima u njemu konstantan (u vremenu) impuls. Svaka transformacija iz $\overline{\mathcal{G}}$ preslikava konstantan impuls u konstantan impuls.

Zadatak 5.1.7 Dokazati ovaj iskaz.

Dakle, ako primenimo transformaciju iz $\overline{\mathcal{G}}$ na ortove inercijalnog koordinatnog sistema, opet ćemo dobiti inercijalni referentni sistem. Ispostavlja se da je $\overline{\mathcal{G}}$ najobuhvatnija grupa transformacija koje iz jednog inercijalnog koordinatnog sistema generišu druge analogne referentne sisteme.

Zadatak 5.1.8 Prodiskutovati inercijalne koordinatne sisteme koji su fiktivni, tj. fizički neostvarivi, a dobijaju se primenom neke transformacije iz $\overline{\mathcal{G}}$ na fizički ostvarivi inercijalni referentni sistem.

Imajući u vidu pomenutu ulogu grupe $\overline{\mathcal{G}}$ u generisanju svih inercijalnih koordinatnih sistema iz jednog od njih, govori se o $\overline{\mathcal{G}}$ kao o *grupi relativiteta* klasične mehanike. Izražavajući istu misao, govori se i o opštem Galilejevom principu relativiteta. Ova relativistička uloga grupe $\overline{\mathcal{G}}$ (ne mešati ovo sa relativističkom fizikom, u kojoj ulogu $\overline{\mathcal{G}}$ preuzima proširena Poincare-ova grupa) je u najužoj vezi sa pasivnom interpretacijom transformacija.

Pri aktivnoj interpretaciji transformacija iz $\overline{\mathcal{G}}$ ima se u vidu nepromenjenost forme Hamiltonovih jednakosti kretanja (to je tzv. kanoničnost ovih transformacija, u koju mi nismo ulazili). Na osnovu toga govori se o opštem Galilejevom principu invarijantnosti.

Sad ćemo da damo jednu teorijski koncizniju ekvivalentnu definiciju pojmova homogenosti i izotropnosti, koje smo pomenuli u § 5.1.1.

Homogenost prostora i vremena se u aktivnoj interpretaciji sastoji u tome što su grupe T_3 i T_1 grupe automorfizama (izomorfizama) objektivnog prostor-vremena (na samog sebe). Drugim rečima, dotične transformacije održavaju rastojanje. Analogno, izotropnost prostora je u tome što je i rotaciona grupa R(3) grupa automorfizama prostora.

U pasivnoj interpretaciji homogenost prostor-vremena i izotropnost prostora ogledaju se u tome što bilo kojom transformacijom iz T_3 i T_1 odnosno iz R(3) prelazimo sa inercijalnog koordinatnog sistema na isti takav referentni sistem.

Kao što je čitaocu verovatno jasno, grupe T_3, T_1 i R(3) i transformacije $\mathcal{J}_p$ i $\mathcal{J}_v$ igraju osnovniju ulogu nego $\mathrm{T}_3^{(v)}$. One su geometrijske grupe i transformacije, vezane za geometrijsku strukturu prostor-vremena. Grupa $\mathrm{T}_3^{(v)}$ je kinematička, pošto je u vezi sa kinematičkim stanjem ili stanjem (inercijalnog) kretanja koordinatnog sistema. Sve transformacije iz $\overline{\mathcal{G}}$ nazivaćemo *kinematičkim transformacijama* (podrazumevajući da "kinematički" sadrži "geometrijski" kao specijalni slučaj).

5.1.8 Generisanje Galilejevih transformacija pomoću eksponencijalnih operatorskih funkcija

U odeljku § 2.5, pri izlaganju kvantizacije klasičnih varijabli u kvantno-mehaničke operatore, istakli smo činjenicu da su neki nestandardni aspekti klasične mehanike od osnovnog značaja za prelazak na kvantnu mehaniku. Prvi primer bile su Poisson-ove zagrade. Sada ćemo ukazati na drugi primer, koji se nadgrađuje na Poisson-ove zagrade.

Kao što je poznato, transformacije faznog prostora klasičnog sistema pod kojima su Hamilton-ove jednačine kretanja i Poisson-ove zagrade invarijantne nazivaju se kanoničnim transformacijama. Jednoparametarske grupe kanoničnih transformacija mogu se generisati sa po jednom varijablom uz korišćenje po jednog parametra.

Neka su $A(\mathbf{r},\mathbf{p})$ i $G(\mathbf{r},\mathbf{p})$, dve varijable (jednočestičnog sistema) i to neka je A tekuća, a G fiksirana varijabla. Definišimo operator $\tilde{G}$ koji deluje u skupu svih varijabli A (koje su analitičke funkcije na faznom prostoru) na sledeći način:

$$\boxed{\tilde{G}A \stackrel{\mathrm{def}}{=} [\ G, A\ ]_{\mathrm{PZ}}},\ \forall A(\mathbf{r},\mathbf{p}), \tag{5.1.12}$$

a pod $e^{\theta\tilde{G}}$ podrazumevaćemo operatorsku funkciju

$$\boxed{e^{\theta\tilde{G}} \stackrel{\mathrm{def}}{=} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\theta^n\tilde{G}^n}{n!}} \tag{5.1.13}$$

($\tilde{G}^n$ je n puta uzastopno primenjeno $\tilde{G}$). Skup $\{e^{\theta\tilde{G}} \mid -\infty < \theta < \infty\}$ je jednoparametarska Liejeva grupa kanoničnih transformacija definisanih, kao što smo rekli, na skupu varijabli $A(\mathbf{r},\mathbf{p})$. Tu spadaju i 6 varijabli osnovnog skupa: $x = x(\mathbf{r},\mathbf{p}),\ldots,p_z = p_z(\mathbf{r},\mathbf{p})$, gde, na primer, $x(\mathbf{r},\mathbf{p})$ znači uzeti apscisu u tački $(\mathbf{r},\mathbf{p})$ faznog prostora.

Obeležavajući sa $H = \frac{p^2}{2m}$ Hamilton-ovu funkciju slobodne čestice, a sa m njenu masu, ispostavlja se da se delovanje neprekidnih Galilejevih transformacija reprodukuje u prostoru varijabli (na faznom prostoru) materijalne tačke pomoću eksponencijalnih funkcija operatora na sledeći način[5.1.4,5.1.5]:

$$\boxed{e^{-\mathbf{a}\cdot\tilde{\mathbf{p}}}q = q + a_q},\ q = x, y, z; \tag{5.1.14a}$$

$$\boxed{e^{-b\tilde{H}}q = q + b\frac{p_q}{m}},\ q = x, y, z; \tag{5.1.15a}$$

$$\boxed{e^{-\boldsymbol{\phi}\cdot\tilde{\mathbf{l}}}q = \sum_{q'=x}^{z} R_{qq'}(\phi)q'},\ q = x, y, z; \tag{5.1.16a}$$

$$\boxed{e^{\mathbf{v}\cdot m\tilde{\mathbf{r}}}q = q},\ q = x, y, z. \tag{5.1.17a}$$

[5.1.4] Nećemo dokazivati relacije (5.1.14a)-(5.1.17b). Čitaoca koji želi da se bliže upozna sa ovom materijom upućujemo na veoma zanimljivu knjigu: E. C. G. Sudarshan and N. Mukunda, *Classical Dynamics: A Modern Perspective*, John Wiley and Sons, New York, 1974. Ova knjiga predstavlja moderan i nestandardan pogled na klasičnu mehaniku sa gledišta simetrija i teorije grupa, a po inspiraciji iz kvantne mehanike. Kao drugu referencu na Galilejevu grupu pomenućemo *Group Theory and Its Applications*, Volume II, Editor E. M. Loebl, Academic Press, New York, 1971; poslednja glava. Kao treću referencu navešćemo: L. Fonda and G. C. Ghirardi, *Symmetry Principles in Quantum Physics*, Marcel Dekker, New York, 1970.

[5.1.5] Lako je videti da je na primer $e^{-\mathbf{a}\cdot\tilde{\mathbf{p}}} = e^{-a_x\tilde{p}_x}e^{-a_y\tilde{p}_y}e^{-a_z\tilde{p}_z}$, a podgrupe $\{e^{-a_q\tilde{p}_q} \mid -\infty < a_q < \infty\}$, $q = x, y, z$, su jednoparametarske. Drugim rečima, troparametarske grupe T_3, $\mathrm{R}(3)$ i $\mathrm{T}_3^{(v)}$ svode se na prirodan način na jednoparametarske podgrupe. U stvari samo kod $\mathrm{R}(3)$, koja nije komutativna, ovo svođenje nije trivijalno (nije direktni proizvod jednoparametarskih podgrupa kao kod T_3 i $\mathrm{T}_3^{(v)}$), naime: $e^{-\boldsymbol{\phi}\cdot\tilde{\mathbf{l}}} = e^{-\phi_x\tilde{l}_x-\phi_y\tilde{l}_y-\phi_z\tilde{l}_z} \neq e^{-\phi_x\tilde{l}_x}e^{-\phi_y\tilde{l}_y}e^{-\phi_z\tilde{l}_z}$.

U impulsnom prostoru imamo analogno:

$$e^{-\mathbf{a}\cdot\tilde{\mathbf{p}}}p_q = p_q,\ q = x, y, z; \tag{5.1.14b}$$

$$e^{-b\tilde{H}}p_q = p_q,\ q = x, y, z; \tag{5.1.15b}$$

$$e^{-\boldsymbol{\phi}\cdot\tilde{\mathbf{l}}}p_q = \sum_{q'=x}^{z} R_{qq'}(\boldsymbol{\phi})p_{q'},\ q = x, y, z; \tag{5.1.16b}$$

$$e^{\mathbf{v}\cdot m\tilde{\mathbf{r}}}p_q = p_q - mv_q,\ q = x, y, z. \tag{5.1.17b}$$

Zadatak 5.1.9 Dokazati (5.1.14b) i (5.1.14a) (uporediti Primedbu 5.1.5).

Za sada nije definisan vektor $\boldsymbol{\phi}$, koji daje parametrizaciju grupe R(3). Njega ćemo definisati i proučiti niže, u odeljku § 6.1. Vektorska varijabla $\mathbf{l}(\mathbf{r}, \mathbf{p})$ je uglovni moment čestice, tj. vektorski proizvod $\mathbf{l} \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{r} \times \mathbf{p}$.

Pažljivi čitalac je zapazio da su relacije (5.1.15a)-(5.1.15b) u stvari zakon kretanja slobodne čestice u inercijalnom koordinatnom sistemu u skladu sa spontanom aktivnom interpretacijom vremenskih translacija.

Na kraju paragrafa, rezimirajmo koje su osnovne podgrupe Galilejeve grupe $\mathcal{G}$ i koje su varijable odgovarajući generatori:

$$\boxed{\mathrm{T}_3 \leftrightarrow \mathbf{p};\ \mathrm{T}_1 \leftrightarrow H;\ \mathrm{R}(3) \leftrightarrow \mathbf{l};\ \mathrm{T}_3^{(v)} \leftrightarrow m\mathbf{r}}. \tag{5.1.18}$$

Dakle, tu su osnovne varijable $\mathbf{r}$ i $\mathbf{p}$ i njihove najvažnije funkcije $\mathbf{l}$ i H. U smislu (5.1.18) govori se o *fundamentalnoj paralelnosti* transformacija simetrije s jedne strane i najvažnijih varijabli sa druge strane. Videćemo da se ova paralelnost prenosi u kvantnu mehaniku[5.1.6].

5.1.9 * Izomorfizmi i antiizomorfizmi izmedju grupa transformacija u različitim prostorima

U paragrafima § 5.1.5 do § 5.1.7 tvrdili smo da je svejedno hoćemo li interpretirati pojedine transformacije aktivno ili pasivno. U sveopštoj pripremi za kvantizaciju Galilejevih transformacija moramo i ovo stanovište dalje precizirati.

Pokazalo se svrsishodnim da se pri izboru interpretacije *zahteva izomorfnost* grupa transformacija, što u suštini znači "jednako" delovanje dotičnih grupa kao celina. Na primer, kada $\overline{\mathcal{G}}$ uzimamo u aktivnoj interpretaciji, tj. kao grupu transformacija kinematičke simetrije objektivnog prostor-vremena, i definišemo transformacije $T \in \overline{\mathcal{G}}$ u faznom prostoru, imamo izomorfizam grupe u objektivnom prostoru na grupu u faznom prostoru. Dakle, ovde je aktivna interpretacija potpuno zadovoljavajuća, tj. ona je usklađena sa zahtevom izomorfnosti (videti desnu kolonu Crteža C 5.2).

To već nije slučaj sa pasivnom interpretacijom. Sada se $\overline{\mathcal{G}}$ u objektivnom prostor-vremenu pojavljuje u pasivnoj ulozi grupe relativiteta, delujući na inercijalne koordinatne sisteme (kvadrat I

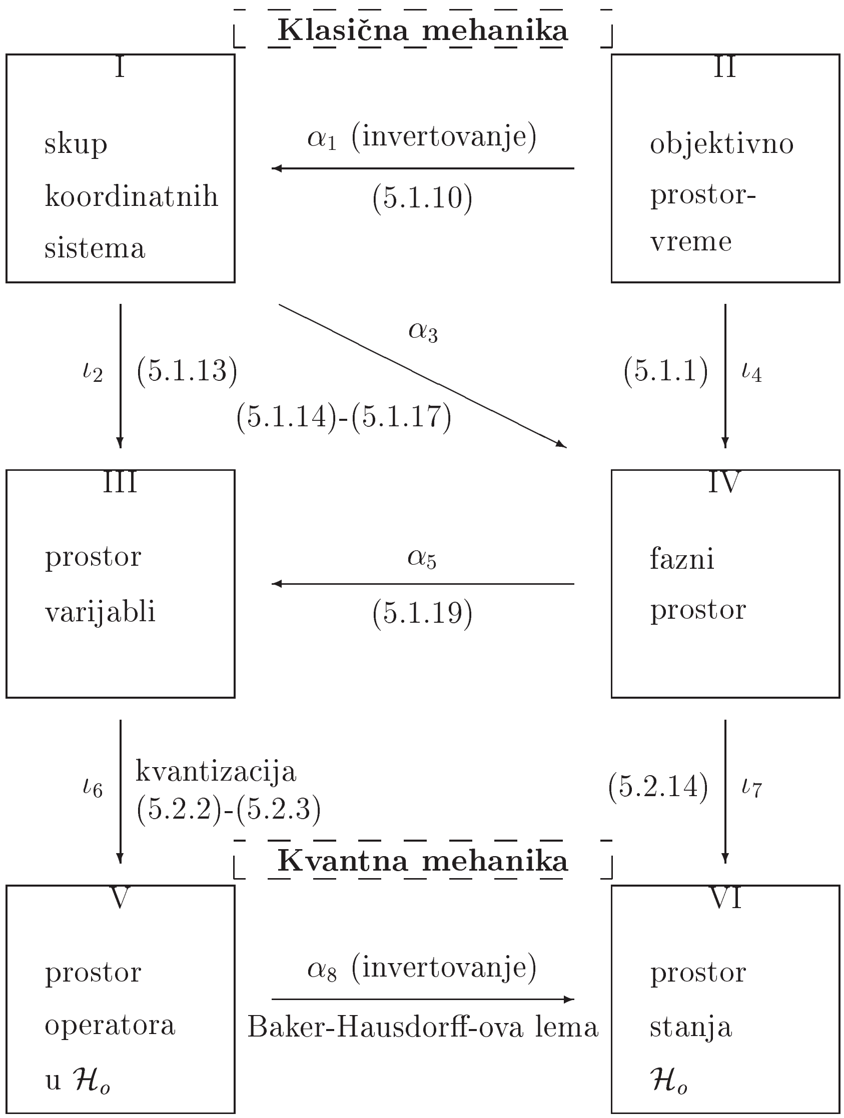
[5.1.6]* Sa tačke gledišta formalizma treba istaći da neprekidne transformacije čine Lie-jeve grupe, a varijable koje ih generišu čine Lie-jeve algebre sa Poissonovom zagradom kao Lie-jevim proizvodom.

na Crtežu C 5.2), a pojedine transformacije se pri tome invertuju. Invertovanje je antizomorfizam (tj. ne održava već obrće poredak množenja elemenata u grupi), te je grupa $\overline{\mathcal{G}}$ u faznom prostoru (kvadrat IV) antiizomorfna grupi relativiteta. Stoga pasivna interpretacija grupe $\overline{\mathcal{G}}$ u faznom prostoru ne zadovoljava gornji zahtev izomorfnosti.

Pređimo sad na prostor varijabli i na Galilejeve transformacije koje se pojavljuju na levoj strani jednačina (5.1.14a)-(5.1.17b) (tj. koje deluju u kvadratu III).

Kao što se čitalac može lako uveriti (npr. na podskupu osnovnih varijabli), transformacije $T \in \overline{\mathcal{G}}$ sad deluju na varijable kao na funkcije (tj. funkcionalne zavisnosti) na faznom prostoru i to kao transformacije $\mathbb{T}$ indukovane na sledeći način:

$$\mathbb{T}A(\mathbf{r}, \mathbf{p}) = A(T\mathbf{r}, T\mathbf{p}), \ \forall T \in \overline{\mathcal{G}}, \ \forall A(\mathbf{r}, \mathbf{p}). \tag{5.1.19}$$



Slika 5.2: **Aktivna i pasivna interpretacija transformacija**. Leva kolona *(kvadrati I, III i V i izomorfizmi ι_2 i ι_6) daje elemente za pasivnu,* a desna kolona *(kvadrati II, IV i VI i izomorfizmi ι_4 i ι_7) za aktivnu interpretaciju grupa $E(3)$ i $T_3^{(v)}$. Antiizomorfizmi α_1, α_3, α_5 i α_8, kao i izomorfizmi ι_2, ι_4, ι_6 i ι_7 povezuju osnovne podgrupe Galilejeve grupe koje deluju u skupovima označenim sa I do VI. Specijalno: $\iota_2 \stackrel{\text{def}}{=} \alpha_5 \circ \alpha_3 = \alpha_5 \circ \iota_4 \circ \alpha_1^{-1}$; $\alpha_3 = \iota_4 \circ \iota_1$ je prevođenje viđenja između dva opservera); ι_4 je reprezentovanje u fiksiranom koordinatnom sistemu sa implikacijama u impulsnom prostoru.*

Čitalac može lako proveriti za bilo koju od osnovnih podgrupa od $\mathcal{G}$ da je pridruživanje $T \mapsto \mathbb{T}$ dato sa (5.1.19) antiizomorfizam dotične podgrupe koja deluje u faznom prostoru (kvadrat IV) na "istu" podgrupu koja deluje u prostoru varijabli (kvadrat III).

Što se tiče cele grupe $\mathcal{G}$, (5.1.19) nije antiizomorfizam, jer se pri prelasku sa faznog prostora na prostor varijabli poremećuje odnos podgrupe $\mathrm{T}_3^{(v)}$ sa ostalim osnovnim podgrupama od $\mathcal{G}$. To u stvari potiče od nekomutiranja operatora $\tilde{\mathbf{p}}$ i $\tilde{\mathbf{r}}$ (u (5.1.14a),(5.1.14b),(5.1.17a) odnosno (5.1.17b); videti više o ovome ispod (5.2.18) i u prvim dvema referencama iz Primedbe 5.1.4).

Dakle, seljenje grupe iz faznog prostora u prostor varijabli (označeno sa "5" na Crtežu C 5.2), koje predstavlja presudan korak uoči kvantizacije klasičnih transformacija (kao što ćemo videti u sledećem odeljku), primorava nas da se odreknemo grupe $\mathcal{G}$ ili $\overline{\mathcal{G}}$ kao celine. Umesto o $\overline{\mathcal{G}}$, govorićemo posebno o E(3) i posebno o $\mathrm{T}_3^{(v)}$. Pri tome T_1 izostavljamo, jer za nju je najvažnija spontana aktivna interpretacija, a nju smo već obradili u glavi 3. Involucije $\mathcal{J}_p$ i $\mathcal{J}_v$ izostavljamo arbitrerno.

Iz rečenog se vidi da u prostoru varijabli (kvadrat III) aktivna interpretacija geometrijske grupe E(3), koja polazi od delovanja ove grupe u objektivnom prostor-vremenu (u kvadratu II), ne zadovoljava zahtev izomorfizma. Međutim, pasivna interpretacija (pri kojoj se polazi od delovanja E(3) u kvadratu I) zadovoljava, jer dva antiizomorfizma se množe u izomorfizam (uporediti Crtež C 5.2). Na Crtežu C 5.2 leva kolona prikazuje pasivnu interpretaciju za $\mathrm{T}_3^{(v)}$ i E(3), a desna kolona nam predočava aktivnu interpretaciju istih grupa. Kao što smo rekli, iz fizičkih razloga za $\mathrm{T}_3^{(v)}$ je samo pasivna interpretacija prirodna, a za E(3) prirodne su obe. Međutim, kao što ćemo videti u sledećem odeljku, u slučaju Euklidove grupe prednost se daje aktivnoj interpretaciji. Ova konvencija možda potiče od važne uloge koju fazni prostor igra u definiciji osnovnog skupa opservabli.

5.2 Galilejeve transformacije u kvantnoj mehanici

Počećemo odeljak proučavanjem opšteg pojma transformacije simetrije u kvantnoj mehanici. Objasnićemo značajni teorem Wigner-a po kome se svaka transformacija simetrije može izraziti unitarnim ili antiunitarnim operatorom u prostoru stanja kvantnog sistema. Zatim ćemo kvantovati pojedine Galilejeve transformacije, tj. izrazićemo ih u vidu operatora u kvantno-mehaničkom prostoru stanja. Na kraju ćemo detaljnije prodiskutovati operatore prostornih translacija i specijalnih Galilejevih transformacija i nabacićemo način konstrukcije operatora Galilejevih transformacija u prostoru stanja višečestičnog kvantnog sistema.

Vremenske translacije su u stvari već bile detaljno proučene u § 3.1, pa ih se u ovom odeljku samo dotičemo (u § 5.2.5). Operatorima rotacije i opservablama uglovnog momenta biće posvećena sledeća glava. Operatore diskretnih kinematičkih transformacija ćemo uvesti tek nakon što savladamo teoriju rotacija i uglovnih momenata.

5.2.1 Pojam transformacije simetrije u kvantnoj mehanici

U Hamilton-ovoj formi klasične mehanike transformacije simetrije su kanonične transformacije. U prethodnom odeljku podsetili smo se na kanonične transformacije koje su najvažnije sa gledišta kvantne mehanike: na Galilejeve transformacije i na inverziju prostora i vremena.

Postavlja se pitanje šta u kvantnoj mehanici odgovara kanoničnim transformacijama, tj. šta je tu najšira klasa transformacija simetrije.

U paragrafu § 2.1.2, u Postulatu o stanjima, videli smo da svi vektori u prostoru stanja $\mathcal{H}$ koji pripadaju jednom te istom pravcu (tj. jednodimenzionalnom potprostoru) u $\mathcal{H}$ imaju isti fizički smisao: opisuju (nakon normiranja) jedan te isti homogeni ansambl kvantnih sistema. Obeležimo sa $\mathcal{P}(\mathcal{H})$ *prostor svih pravaca*[5.2.1] u $\mathcal{H}$. Na osnovu pomenutog Postulata, $\mathcal{P}(\mathcal{H})$ je u biunivokoj korespondenciji sa skupom svih mogućih čistih kvantnih ansambala.

Može se smatrati da je *verovatnoća prelaza*, uvedena u § 2.4.7, binarna operacija u $\mathcal{P}(\mathcal{H})$: za svaka dva pravca $p_1, p_2 \in \mathcal{P}(\mathcal{H})$ definisan je broj iz intervala $[0,1]$ jednak $|\langle\, \psi \mid \phi\rangle|^2$, gde su $|\, \psi\,\rangle \in p_1$ i $|\, \phi\,\rangle \in p_2$ normirani vektori.

Opšta transformacija simetrije u kvantnoj mehanici definiše se kao transformacija (tj. biunivoko ceo-na-ceo preslikavanje, ili bijekcija) u $\mathcal{P}(\mathcal{H})$ koja održava verovatnoću prelaza, tj. ako pravac p_1 prevodi u p_1' i p_2 u p_2', onda imamo

$$|\langle\, \psi \mid \phi\rangle|^2 = |\langle\, \psi' \mid \phi'\rangle|^2,\ |\, \psi\,\rangle \in p_1,\ |\, \phi\,\rangle \in p_2,\ |\, \psi'\,\rangle \in p_1',\ |\, \phi'\,\rangle \in p_2'. \tag{5.2.1}$$

Mi ćemo niže (u § 5.2.3 i § 5.2.4) preći sa klasičnih kinematičkih transformacija na operatore u $\mathcal{H}$, i uverićemo se da oni u $\mathcal{P}(\mathcal{H})$ indukuju transformacije za koje važi (5.2.1), tj. transformacije simetrije[5.2.2].

Fizički smisao zahteva održanja verovatnoće prelaza ćemo najlakše razumeti ako se ograničimo na neku Galilejevu transformaciju i opredelimo za pasivnu interpretaciju. Neka su O i O' dva opservera, oba sa inercijalnim koordinatnim sistemom. Pošto normirani vektor predstavlja viđenje čistog kvantnog ansambla od strane datog posmatrača[5.2.3], jedan čisti ansambl će opserver O opisivati recimo sa $|\, \psi\,\rangle$, a opserver O' će taj isti ansambl opisivati recimo sa $|\, \psi'\,\rangle$. Isto tako, nakon određenog selektivnog kompletnog merenja (što je premisa "prelaza" $|\, \psi\rangle \to |\, \phi\rangle$ u (5.2.1), videti § 2.4.7), posmatrač O će nastali ansambl opisivati stanjem $|\, \phi\,\rangle$ recimo, a posmatrač O' recimo stanjem $|\, \phi'\,\rangle$.

Pošto je verovatnoća prelaza empirijski relativna frekvencija (broj događaja podeljen brojem sistema u ansamblu), ona mora biti ista za oba opservera. To je smisao zahteva (5.2.1).

Preostaje nam da vidimo kako se konkretno ostvaruje *prenošenje* klasičnih transformacija u $\mathcal{P}(\mathcal{H})$. Videli smo u paragrafu § 2.4.6, kada smo iskazno upotpunili Postulat o stanjima, da svojstvene vrednosti potpunog skupa kompatibilnih opservabli uspostavljaju vezu između elemenata od $\mathcal{P}(\mathcal{H})$ i laboratorijske preparacije homogenih kvantnih ansambala. Možemo to iskoristiti za prenošenje klasičnih transformacija u $\mathcal{P}(\mathcal{H})$. Na primer, pošto je za jednu česticu potpuni skup kompatibilnih opservabli $\hat{\mathbf{r}}$, onda tački $\mathbf{r}$ klasičnog konfiguracionog prostora odgovara pravac $p \in \mathcal{P}(\mathcal{H})$ kome pripada $|\, \mathbf{r}\,\rangle$. Ako jedna transformacija preslikava $\mathbf{r}$ u $\mathbf{r}'$, onda u $\mathcal{P}(\mathcal{H})$ njoj pridružujemo (tj. prenosimo je u) transformaciju koja prevodi pravac od $|\, \mathbf{r}\,\rangle$ u pravac od $|\, \mathbf{r}'\,\rangle$. Prosledićemo ovu misao kroz najvažnije primere transformacija.

[5.2.1] Tzv. *projektivni prostor*; engleski ray space (čitati rej spejs); ruski *проективное пространство*.

[5.2.2] Među upravo definisane kvantno-mehaničke transformacije simetrije spadaju sve klasične kanonične transformacije (posle kvantizacije), a potencijalno "ima mesta" i za nove, čisto kvantno-mehaničke transformacije simetrije.

[5.2.3] Strogo uzevši, ovaj iskaz je pooštrenje Postulata o stanjima iz § 2.1.2. Iziskuje ga činjenica da je za kvantno-mehaničko opisivanje jednog kvantnog ansambla neophodno da postoji i opserver sa datim inercijalnim koordinatnim sistemom. On je u stvari zamišljeni izvršilac kvantnih merenja, čije rezultate predskazuje kvantna mehanika.

5.2.2 Wigner-ov teorem o (anti)unitarnim operatorima simetrije

Pošto je sav kvantno-mehanički formalizam formulisan u prostoru stanja $\mathcal{H}$, a ne u $\mathcal{P}(\mathcal{H})$, neophodno je preneti "suviše apstraktne" transformacije simetrije iz $\mathcal{P}(\mathcal{H})$ u $\mathcal{H}$ i tu ih pretvoriti u operatore[5.2.4]. Pri tome nameće nam se pitanje da li će operatori simetrije u $\mathcal{H}$ imati lepe matematičke osobine, kao što je to na primer slučaj sa hermitskim operatorima koji predstavljaju opservable.

Odgovor na ovo pitanje daje sledeći teorem, za čiji dokaz upućujemo na literaturu[5.2.5].

Teorem 5.2.1 (Wigner-ov teorem) *A. Svaka transformacija simetrije u $\mathcal{P}(\mathcal{H})$ može da se prenese u Hilbert-ov prostor $\mathcal{H}$ tako da postane ili unitarni operator $\hat{U}$ ili antiunitarni operator $\hat{U}_a$.*
B. Višeznačnost prenošenja u pomenuti operator sastoji se tačno u proizvoljnom faznom faktoru, tj. na primer sa operatorom $\hat{U}$ i operator $e^{\imath\lambda}\hat{U}$ — za svaki realan λ — i nijedan drugi operator pomenutog tipa, indukuje u $\mathcal{P}(\mathcal{H})$ jednu te istu transformaciju simetrije.

Skupovi $\{e^{\imath\lambda}\hat{T} \mid 0 \leq \lambda < 2\pi\}$ svih unitarnih (ili antiunitarnih) operatora iz pravca (jednodimenzionalnog potprostora) operatora koji obrazuje unitarni $\hat{T} = \hat{U}$ (ili antiunitarni $\hat{T} = \hat{U}_a$) u linearnom prostoru operatora su pravi reprezentanti pojedinih transformacija simetrije. Radi o tzv. projektivnim reprezentacijama.

Ako hoćemo da dobijemo običnu reprezentaciju, onda moramo iz svakog skupa operatora izabrati po jedan operator ali tako da dobijemo izomorfnu grupu. To nije uvek moguće. Ispostavlja se da to jeste moguće za pojedine podgrupe Galilejeve grupe: za T_3, T_1, R(3) i $\mathrm{T}_3^{(v)}$ i čak i E(3), ali ne i za celu grupu $\mathcal{G}$ (niti za proširenu Galilejevu grupu $\overline{\mathcal{G}}$).

5.2.3 Kvantizacija Galilejevih transformacija — početak

Kada sa Galilejevih transformacija u klasičnoj mehanici želimo da pređemo na kvantno-mehaničke operatore u prostoru stanja $\mathcal{H}$ kvantnog sistema, pogodno je poći od jednakosti (5.1.14a)-(5.1.17b). One su u takvoj formi da je Postulat o kvantizaciji (iz § 2.5.3) neposredno primenljiv na njih. Naime, u njima osnovnu ulogu igraju Poisson-ove zagrade, a znamo da njih treba zameniti komutatorom (pomnoženim sa $-\frac{\imath}{\hbar}$).

Pođimo od prve jednakosti u sistemu jednakosti (5.1.14a): $e^{-\mathbf{a}\cdot\tilde{\mathbf{p}}}x = x + a_x$. Ona se svodi na (uporediti sa primedbom 5.1.5):

$$e^{-a_x\tilde{p}_x}x = x + a_x. \tag{5.2.2}$$

Kvantizacijom ova jednakost prelazi u

$$e^{\frac{\imath}{\hbar}a_x\hat{\tilde{p}}_x}\hat{x} = \hat{x} + a_x, \tag{5.2.3}$$

[5.2.4] Preciznije, za datu transformaciju u $\mathcal{P}(\mathcal{H})$ treba naći linearni operator u $\mathcal{H}$ takav da održava verovatnoću prelaza i da, pošto nužno prevodi svaki pravac na pravac, indukuje u $\mathcal{P}(\mathcal{H})$ upravo transformaciju od koje smo pošli.

[5.2.5] Originalni Wigner-ov dokaz je poboljšan u radu V. Bargmann, *Journal of Mathematical Physics*, **5** (1964) 862.

gde je $\hat{x}$ opservabla apscise čestice u orbitnom prostoru $\mathcal{H}_o$, a $\hat{\hat{p}}_x$ je operator koji deluje na operatore na sledeći način:

$$\hat{\hat{p}}_x \hat{x} \stackrel{\mathrm{def}}{=} [\ \hat{p}_x, \hat{x}\ ]. \tag{5.2.4}$$

Operatoru $\hat{A}$ pridružujemo tzv. *superoperator* $\hat{\hat{A}}$ koji na svaki operator $\hat{B}$ u $\mathcal{H}_o$ deluje na sledeći način:

$$\hat{\hat{A}}(\hat{B}) \stackrel{\mathrm{def}}{=} [\ \hat{A}, \hat{B}\ ]. \tag{5.2.5}$$

Treba zapaziti da smo pri prelasku sa (5.2.2) na (5.2.3) iskoristili $e^{-a_x\tilde{p}_x} \stackrel{\mathrm{def}}{=} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-a_x\tilde{p}_x)^n}{n!}$, a prema zahtevima 3), 1), 2) i 4) Postulata o kvantizaciji, celokupni red održava formu pri prelasku na kvantno-mehaničke operatore, a $\tilde{p}_x$ prelazi u $\hat{\hat{p}}_x$. Tako dobijamo $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-a_x\hat{\hat{p}}_x)^n}{n!} \stackrel{\mathrm{def}}{=} e^{-a_x\hat{\hat{p}}_x}$.

Superoperatori su ne samo složeni entiteti, nego i deluju na pogrešne objekte. Nama su potrebni operatori u $\mathcal{H}_o$, a ne u operatorskom prostoru. Zato ćemo superoperatore smatrati intermedijarnim korakom bez neposrednog značaja za našu svrhu.

Da bismo izvršili poslednji korak, oslonićemo se na sledeću lemu, koja se u matematici naziva *Baker-Hausdorff-ovom*[5.2.6] lemom (dokazaćemo je u Dodatku § 5.2.10).

Lema 5.2.1 *Neka su $\hat{A}$ i $\hat{B}$ dva operatora u nekom Hilbert-ovom prostoru $\mathcal{H}$ takva da je definisan operator $e^{\hat{\hat{B}}}\hat{A}$, pri čemu je $\hat{\hat{B}}\hat{A} \stackrel{\mathrm{def}}{=} [\ \hat{B}, \hat{A}\ ]$. Onda važi*

$$e^{\hat{\hat{B}}}\hat{A} = e^{\hat{B}}\hat{A}e^{-\hat{B}}. \tag{5.2.6}$$

Obratiti pažnju da na LS-i od (5.2.6) imamo superoperator $e^{\hat{\hat{B}}}$, eksponencijalnu funkciju od superoperatora $\hat{\hat{B}}$, koji deluje na $\hat{A}$ (preko komutatora), a na DS-i od (5.2.6) imamo proizvod tri operatora.

Na osnovu (5.2.6), (5.2.3) možemo da prepišemo u vidu

$$e^{\frac{i}{\hbar}a_x\hat{p}_x}\hat{x}e^{-\frac{i}{\hbar}a_x\hat{p}_x} = \hat{x} + a_x, \tag{5.2.7}$$

a (obični) operator $e^{\frac{i}{\hbar}a_x\hat{p}_x}$ deluje (kao i $\hat{x}$) na vektore u $\mathcal{H}_o$. Pošto je $\frac{i}{\hbar}a_x\hat{p}_x$ kosohermitski operator, lako se vidi da je $e^{\frac{i}{\hbar}a_x\hat{p}_x}$ unitaran operator.

U paragrafu § 5.2.9 ćemo se uveriti da svaka klasična transformacija koja je element povezane grupe kvantizacijom prelazi u unitaran operator. Prema tome, svaka *Galilejeva transformacija* postaje *unitaran operator* u kvantnoj mehanici.

Na Crtežu niže dodat je i kvantno-mehanički deo na C 5.2. Upravo opisano pridruživanje $e^{-a_x\tilde{p}_x} \mapsto e^{\frac{i}{\hbar}a_x\hat{\hat{p}}_x}$ je primer izomorfizma "6" na Crtežu. Sad moramo detaljnije proučiti kako treba preći na primenu transformacije u prostoru stanja $\mathcal{H}_o$.

Setimo se Schrödinger-ove i Heisenberg-ove slike zakona kretanja, koji je za konzervativan sistem u stvari translacija u vremenu, znači Galilejeva transformacija iz T_1. Prirodno je očekivati da ćemo i transformacije iz E(3) ili $\mathrm{T}_3^{(v)}$ primenjivati ili na vektore stanja a na operatore ne, ili, umesto toga, na operatore a na vektore stanja ne. A prelazak sa jedne verzije na drugu se ostvaruje invertovanjem (α_8 na Crtežu C 5.2).

I stvarno je tako, kao što sledi iz činjenice da se u kvantnoj mehanici sve merljivo svodi na matrične elemente operatora, tj. na izraze vida $(\psi, \hat{A}\phi)$. Oni će se jednako menjati bilo da

[5.2.6] Čitati: Bejke, Hausdorf.

primenimo operator $\hat{U}$ na vektore: $(\hat{U}\psi, \hat{A}\hat{U}\phi)$, bilo da primenimo inverzni operator $\hat{U}^{-1} = \hat{U}^\dagger$ (jer je $\hat{U}$ unitaran ili antiunitaran) na operator: $(\psi, \hat{U}^{-1}\hat{A}\hat{U}\phi)$, što je jednako sa $(\hat{U}\psi, \hat{A}\hat{U}\phi)$.

Kao što se vidi, na Crtežu C 5.2, desna kolona odgovara aktivnoj interpretaciji dejstva grupe E(3), koja je u kvantnoj mehanici više uobičajena. Samo što smo mi išli umesto kraticom ι_7 (o kojoj će biti reči niže, naročito za diskretne transformacije) dužim putem α_8 posle ι_6 posle α_5 da bi iskoristili već poznatu kvantizaciju varijabli.

Leva kolona na crtežu daje drugu alternativu, pasivnu interpretaciju, tj. tumačenje E(3) ili $\mathrm{T}_3^{(v)}$ kao grupe relativiteta. Kao što smo videli u prethodnom odeljku, za $\mathrm{T}_3^{(v)}$ ova interpretacija je jedina prirodna.

Dijagram je komutativan, tj. npr. α_8 posle ι_6 posle α_5 jednako je ι_7, itd. Kvadrati I, II, III i IV spadaju u klasičnu fiziku, a V i VI u kvantnu mehaniku.

5.2.4 Kvantizacija Galilejevih transformacija — završetak

Kao što smo rekli, što se tiče E(3) uobičajeno je da se u kvantnoj mehanici daje prednost aktivnoj interpretaciji (desna kolona na Crtežu), jer ona prirodno uključuje fazni prostor iz koga crpimo osnovni skup opservabli u $\mathcal{H}_o$. U prethodnom paragrafu smo se uverili da iz toga onda sledi da se odlučujemo za *Schrödinger-ovu verziju* primene operatora E(3) u $\mathcal{H}_o$. Nasuprot tome, za $\mathrm{T}_3^{(v)}$ je prirodna samo pasivna interpretacija (leva kolona na Crtežu). U ovom slučaju je nužna *Heisenberg-ova verzija* primene (inverznih) operatora transformacijom sličnosti (samo) na operatore u $\mathcal{H}_o$.

U našem primeru translacije za a_x, izomorfizam "6" na Crtežu je, kao što smo videli, pretvorio $e^{-a_x\tilde{p}_x}$ u $e^{\frac{i}{\hbar}a_x\hat{p}_x}$, koji transformacijom sličnosti deluje na operatore u $\mathcal{H}_o$ (tj. u kvadratu V). Ako izvršimo antiizomorfizam "8" posle "6", očigledno dobijamo $e^{-\frac{i}{\hbar}a_x\hat{p}_x}$ u $\mathcal{H}_o$ (deluje u kvadratu VI).

Na osnovu (5.1.14a), (5.1.15a) i (5.1.16a), sad možemo odmah da zaključimo da "8" posle "6" posle "5" daje sledeće pridruživanje:

$$\boxed{T_{\mathbf{a}} \mapsto e^{-\frac{i}{\hbar}\mathbf{a}\cdot\hat{\mathbf{p}}} \stackrel{\text{def}}{=} \hat{U}_{\mathbf{a}}}, \ \forall \mathbf{a}; \tag{5.2.8}$$

$$\boxed{T_b \mapsto e^{-\frac{i}{\hbar}b\hat{H}} \stackrel{\text{def}}{=} \hat{U}_b}, \ \forall b \tag{5.2.9}$$

(gde je $\hat{H}$ hamiltonijan slobodne čestice, radi se o aktivnoj nespontanoj interpretaciji — uporediti pred kraj od § 5.1.5);

$$\boxed{R \mapsto e^{-\frac{i}{\hbar}\boldsymbol{\phi}\cdot\hat{\mathbf{l}}} \stackrel{\text{def}}{=} \hat{U}(\boldsymbol{\phi})}, \tag{5.2.10}$$

gde je $R = T_R$ rotacija, a $\hat{\mathbf{l}}$ vektorski operator orbitnog uglovnog momenta u $\mathcal{H}_o$ (pobliže u § 6.5).

Kao što je rečeno, za transformacije $T_{\mathbf{v}} \in \mathrm{T}_3^{(v)}$ prednost dajemo pasivnoj interpretaciji i Heisenberg-ovoj verziji primene ovih operatora na prostor operatora koji deluju u $\mathcal{H}_o$ (kao $\hat{U}...\hat{U}^{-1}$). Kvantizacijom (5.1.17a) dolazimo do (pošto sad "8" na Crtežu otpada):

$$\boxed{T_{\mathbf{v}} \mapsto e^{-\frac{i}{\hbar}\mathbf{v}\cdot m\hat{\mathbf{r}}} \stackrel{\text{def}}{=} \hat{U}_{\mathbf{v}}}, \ \forall \mathbf{v}. \tag{5.2.11}$$

Pošto dve operatorske eksponencijalne funkcije komutiraju ako i samo ako komutiraju operatori u njihovim eksponentima (uporediti dokaz od K 6.4.3), iz (5.2.8) i (5.2.11) se vidi da $\hat{U}_{\mathbf{a}}$ i $\hat{U}_{\mathbf{v}}$

ne komutiraju. Isto je važilo u klasičnom prostoru varijabli, jer Poisson-ove zagrade su analogoni komutatora (uporediti § 5.1.9). S druge strane, svaka transformacija iz T_3 komutira sa svakom transformacijom iz $\mathrm{T}_3^{(v)}$. Stoga nismo mogli $\mathcal{G}$ izomorfno (ili antiizomorfno) preneti u prostor varijabli niti u kvantnu mehaniku[5.2.7], već smo je morali rastaviti na $\mathrm{T}_3^{(v)}$ i $\mathrm{E}(3) \otimes \mathrm{T}_1$.

5.2.5 Operatori translacije u kvantnoj mehanici

Što se tiče vremenskih translacija, videli smo da se polazi od spontane aktivne interpretacije i da se kvantizacijom dobija evolucioni operator, koji smo detaljno proučili u odeljku § 3.1. I vremenske translacije u nespontanoj aktivnoj interpretaciji (uporediti § 5.1.5) igraju izvesnu ulogu u kvantnoj mehanici, mada ne u vidu operatora. Njima smo se koristili u § 3.1.6 da bismo ideju homogenosti vremenske ose izrazili na jeziku evolucionog operatora.

Pokazali smo ranije (videti § 2.5.15) da u jednoj dimenziji važi $\hat{U}^{-1}(q)\hat{x}\hat{U}^(q) = \hat{x} + q$. Ako umesto q pišemo a_x, ovo se u tri dimenzije očigledno proširuje na:

$$\boxed{\hat{U}_{\mathbf{a}}\hat{\mathbf{r}}\hat{U}_{\mathbf{a}}^{-1} = e^{-\frac{i}{\hbar}\mathbf{a}\cdot\hat{\mathbf{p}}}e^{\frac{i}{\hbar}\mathbf{a}\cdot\hat{\mathbf{p}}}\hat{\mathbf{r}} = \hat{\mathbf{r}} - \mathbf{a}} \tag{5.2.12}$$

(naravno, iskoristili smo i jednakost $\hat{U}^{-1}(a_x) = \hat{U}(-a_x)$ i zamenili $-a_x$ sa a_x). Pošto je translacioni operator funkcija $\hat{\mathbf{p}}$, odmah sledi:

$$\boxed{\hat{U}_{\mathbf{a}}\hat{\mathbf{p}}\hat{U}_{\mathbf{a}}^{-1} = e^{-\frac{i}{\hbar}\mathbf{a}\cdot\hat{\mathbf{p}}}\hat{\mathbf{p}}e^{\frac{i}{\hbar}\mathbf{a}\cdot\hat{\mathbf{p}}} = \hat{\mathbf{p}}}. \tag{5.2.13}$$

Tako, znači, deluju operatori translacije prostora $\hat{U}_{\mathbf{a}}$ na osnovni skup opservabli u orbitnom prostoru stanja $\mathcal{H}_o$ čestice. To je, naravno, unutar Schrödinger-ove verzije formalno delovanje.

Na (uopštene) vektore svojstvenog bazisa kompletne vektorske opservable $\hat{\mathbf{r}}$ operatori prostornih translacija deluju na sledeći način:

$$\boxed{\hat{U}_{\mathbf{a}} \mid \mathbf{r}\,\rangle = \mid \mathbf{r}+\mathbf{a}\,\rangle}, \quad \forall\mathbf{a}, \forall\mathbf{r}. \tag{5.2.14}$$

To odmah sledi iz fazne konvencije za ovaj bazis, naime, $\hat{U}_{\mathbf{a}} \mid r\,\rangle = \hat{U}_{\mathbf{a}}e^{-\frac{i}{\hbar}\mathbf{r}\cdot\hat{\mathbf{p}}} \mid \mathbf{r}=0\,\rangle = \hat{U}_{\mathbf{a}}\hat{U}_{\mathbf{r}} \mid \mathbf{r}=0\,\rangle = \hat{U}_{\mathbf{a}+\mathbf{r}} \mid \mathbf{r}=0\,\rangle = \mid \mathbf{r}+\mathbf{a}\,\rangle$ (za faznu konvenciju videti (2.6.10)).

S druge strane, na (uopštene) svojstvene vektore kompletne vektorske opservable $\hat{\mathbf{p}}$ operatori translacija prostora deluju na sledeći način:

$$\hat{U}_{\mathbf{a}} \mid \mathbf{p}\,\rangle = e^{-\frac{i}{\hbar}\mathbf{p}\cdot\mathbf{a}} \mid \mathbf{p}\,\rangle, \ \forall\mathbf{a}, \ \forall\mathbf{p} \tag{5.2.15}$$

(pošto se radi o svojstvenim vektorima i za $\hat{U}_{\mathbf{a}}$).

Kada pogledamo formule (5.2.14) i (5.2.15), vidimo da u $\mathcal{P}(\mathcal{H}_o)$ translacije deluju upravo onako kako smo rekli (na kraju od § 5.2.1). Mogli smo se koristiti ovim prenošenjem iz faznog prostora u $\mathcal{P}(\mathcal{H}_o)$ i zatim u $\mathcal{H}_o$ umesto našeg kvantovanja Galilejeve grupe. Ovaj put ćemo izabrati za diskretne transformacije. Tu se u stvari radi o izomorfizmu "7" sa Crteža, tj. o kratici koju smo zaobišli (da bi naš prelazak na operatore nadgradili na već poznatu kvantizaciju varijabli).

[5.2.7] U stvari $\mathcal{G}$ nema netrivijalne linearne (obične) reprezentacije, već samo tzv. projektivne reprezentacije.

Postavlja se pitanje kako se operatori translacija reprezentuju u *talasnoj mehanici*, tj. u prostoru $\mathcal{L}^2(\mathbf{r})$. Ako reprezentant apstraktnog operatora pišemo nepromenjeno, rezultat glasi:

$$\boxed{\hat{U}_{\mathbf{a}}\psi(\mathbf{r}) = \psi(\mathbf{r}-\mathbf{a})}, \ \forall \mathbf{a}. \tag{5.2.16}$$

Naime, $\hat{U}_{\mathbf{a}}\psi(\mathbf{r}) \stackrel{\text{def}}{=} \langle \mathbf{r} \mid (\hat{U}_{\mathbf{a}} \mid \psi \rangle) = (\langle \mathbf{r} \mid \hat{U}_{\mathbf{a}}) \mid \psi \rangle = \langle\, \mathbf{r}-\mathbf{a} \mid \psi\rangle = \psi(\mathbf{r}-\mathbf{a})$ (treba imati u vidu da je $\langle \mathbf{r} \mid \hat{U}_{\mathbf{a}}$ bra od $\hat{U}^{\dagger}_{\mathbf{a}} \mid \mathbf{r}\rangle = \hat{U}^{-1}_{\mathbf{a}} \mid \mathbf{r}\rangle = \hat{U}_{-\mathbf{a}} \mid \mathbf{r}\rangle = \mid \mathbf{r}-\mathbf{a}\rangle$).

Pažljivi čitalac je primetio da je u dokazivanju formule (E15-5.2) jedino bilo važno da je $\langle \mathbf{r} \mid \hat{U}_{\mathbf{a}}$ bra od $\hat{U}^{-1}_{\mathbf{a}} \mid \mathbf{r}\rangle$. Stoga za sve operatore Galilejeve grupe, ili čak i šire, za sve unitarne operatore $\hat{U}(T)$ važi analogna formula:

$$\boxed{\hat{U}(T)\psi(\mathbf{r}) = \psi(T^{-1}\mathbf{r})}, \ \forall \mathbf{a}. \tag{5.2.17}$$

Ha kraju, da nađemo odgovor i na pitanje kako se operatori translacija prostora iz $\mathcal{H}_o$ reprezentuju u *impulsnoj reprezentaciji*, tj. u prostoru $\mathcal{L}^2(\mathbf{p})$. U analogiji sa rezonovanjem koje dovodi do (5.2.16), dolazi se do zaključka:

$$\hat{U}_{\mathbf{a}}\psi(\mathbf{p}) \stackrel{\text{def}}{=} \langle \mathbf{p} \mid \hat{U}_{\mathbf{a}} \mid \psi \rangle = e^{\frac{\imath}{\hbar}\mathbf{p}\cdot\mathbf{a}}\langle\, \mathbf{p} \mid \psi\rangle = e^{\frac{\imath}{\hbar}\mathbf{p}\cdot\mathbf{a}}\psi(\mathbf{p}), \tag{5.2.18}$$

tj. dobijamo multiplikativne operatore u vidu faznih faktora (za svaku vrednost argumenta $\mathbf{p}$ drugi fazni faktor!).

5.2.6 * Operatori specijalnih Galilejevih transformacija

Kao što smo videli u (5.2.11), operatori *boost*-ova u orbitnom prostoru $\mathcal{H}_o$ jedne čestice glase:

$$\hat{U}_{\mathbf{v}} = e^{\frac{\imath}{\hbar}\mathbf{v}\cdot m\hat{\mathbf{r}}}, \ \forall \mathbf{v} \tag{5.2.19}$$

(oni samo formalno deluju u $\mathcal{H}_o$, u stvari ih primenjujemo u Heisenberg-ovoj verziji na operatore u vidu $\hat{U}_{\mathbf{v}}...\hat{U}_{-\mathbf{v}}$).

Iz (5.1.17a)-(5.1.17b) sledi sledeće delovanje operatora $\hat{U}_{\mathbf{v}}$ na osnovni skup opservabli u $\mathcal{H}_o$:

$$\hat{U}_{\mathbf{v}}\hat{\mathbf{r}}\hat{U}^{-1}_{\mathbf{v}} = \hat{\mathbf{r}}, \quad \hat{U}_{\mathbf{v}}\hat{\mathbf{p}}\hat{U}^{-1}_{\mathbf{v}} = \hat{\mathbf{p}} - m\mathbf{v}, \ \forall \mathbf{v}. \tag{5.2.20}$$

Iz (5.2.19) neposredno sledi (pošto je $\hat{U}_{\mathbf{v}}$ operatorska funkcija od $\mathbf{r}$):

$$\hat{U}_{\mathbf{v}} \mid \mathbf{r}\rangle = e^{\frac{\imath}{\hbar}\mathbf{v}\cdot m\mathbf{r}} \mid \mathbf{r}\rangle, \ \forall \mathbf{r}, \ \forall \mathbf{v}. \tag{5.2.21}$$

Na osnovu (5.2.21) odmah možemo da napišemo (imajući u vidu razonovanje kao u odgovarajućem slučaju u prethodnom paragrafu) kako operatori *boost*-ova deluju u koordinatnoj reprezentaciji:

$$\hat{U}_{\mathbf{v}}\psi(\mathbf{r}) = e^{-\frac{\imath}{\hbar}\mathbf{v}\cdot m\mathbf{r}}\psi(\mathbf{r}), \ \forall \mathbf{v}. \tag{5.2.22}$$

Dakle, deluju kao multiplikativni operatori.

Da bismo izračunali kako operatori $\hat{U}_{\mathbf{v}}$ u $\mathcal{H}_o$ deluju na zajedničke svojstvene bazisne vektore kompletne vektorske opservable $\hat{\mathbf{p}}$, polazimo od fazne konvencije ugrađene u definiciju tog bazisa (uporediti (2.9.2b)).

$$\hat{U}_{\mathbf{v}} \mid \mathbf{p}\rangle = \hat{U}_{\mathbf{v}}e^{\frac{\imath}{\hbar}\mathbf{p}\cdot\hat{\mathbf{r}}} \mid \mathbf{p}=0\rangle = e^{\frac{\imath}{\hbar}(-m\mathbf{v}+\mathbf{p})\cdot\hat{\mathbf{r}}} \mid \mathbf{p}=0\rangle = \mid \mathbf{p}-m\mathbf{v}\rangle, \ \forall \mathbf{v}, \ \forall \mathbf{p}. \tag{5.2.23}$$

Kao posledicu od (5.2.23), imamo delovanje operatora specijalnih Galilejevih transformacija u impulsnoj reprezentaciji:

$$\hat{U}_{\mathbf{v}}\psi(\mathbf{p}) = \psi(\mathbf{p}+m\mathbf{v}), \ \forall \mathbf{v}, \ \forall \mathbf{p}. \tag{5.2.24}$$

5.2.7 Operatori Galilejevih transformacija za višečestični kvantni sistem

Kao što smo videli u § 2.6.8, orbitni prostor stanja N-čestičnog kvantnog sistema je $\mathcal{H}^{(o)}_{1\ldots N} = \mathcal{H}^{(o)}_1 \otimes \cdots \otimes \mathcal{H}^{(o)}_N$, tj. on je direktni proizvod orbitnih prostora stanja pojedinih čestica.

Ako se Galilejeva transformacija $T \in \mathcal{G}$ u orbitnom prostoru stanja jedne čestice predstavlja operatorom $\hat{U}(T)$, onda istu transformaciju u $\mathcal{H}^{(o)}_{1\ldots N}$ predstavlja operator koji je direktni proizvod

$$\hat{U}_{1\ldots N}(T) \stackrel{\text{def}}{=} \hat{U}_1(T) \otimes \hat{U}_2(T) \otimes \cdots \otimes \hat{U}_N(T). \tag{5.2.25}$$

(Za značenje direktnog proizvoda operatora videti matematički podsetnik § 2.6.3.)

Od velike je važnosti da se uoči da u (5.2.25) u svim faktor prostorima deluje operator jedne te iste Galilejeve transformacije T, tj. svih N faktor-operatora u (5.2.25) imaju iste Lie-jeve parametre, jer, npr. u pasivnoj interpretaciji, prelaz prelaz na drugi inercijalni sistem istovremeno menja celi objekat.

Zadatak 5.2.1 Pokazati da za prostorne translacije važe sledeće formule u $\mathcal{H}^{(o)}_{1\ldots N}$:

$$\hat{U}_{\mathbf{a}} = e^{-\frac{i}{\hbar}\mathbf{a}\cdot\sum_{n=1}^{N}\hat{\mathbf{p}}_n}; \tag{5.2.26}$$

$$\hat{U}_{\mathbf{a}}\hat{\mathbf{r}}_n\hat{U}_{\mathbf{a}}^{-1} = \hat{\mathbf{r}} - \mathbf{a},\ \hat{U}_{\mathbf{a}}\hat{\mathbf{p}}_n\hat{U}_{\mathbf{a}}^{-1} = \hat{\mathbf{p}}_n,\ n = 1, \ldots, N; \tag{5.2.27a,b}$$

$$\hat{U}_{\mathbf{a}} \mid \mathbf{r}_1, \ldots, \mathbf{r}_N \rangle = \mid \mathbf{r}_1 + \mathbf{a}, \ldots, \mathbf{r}_N + \mathbf{a} \rangle, \tag{5.2.28a}$$

$$\hat{U}_{\mathbf{a}} \mid \mathbf{p}_1, ..., \mathbf{p}_N \rangle = e^{-\frac{i}{\hbar}\mathbf{a}\cdot\sum_{n=1}^{N}\mathbf{p}_n} \mid \mathbf{p}_1, \ldots, \mathbf{p}_N \rangle; \tag{5.2.28b}$$

a da u koordinatnoj i u impulsnoj reprezentaciji imamo sledeće delovanje:

$$\hat{U}_{\mathbf{a}}\psi(\mathbf{r}_1, \ldots, \mathbf{r}_N) = \psi(\mathbf{r}_1 - \mathbf{a}, \ldots, \mathbf{r}_N - \mathbf{a}), \tag{5.2.29a}$$

$$\hat{U}_{\mathbf{a}}\psi(\mathbf{p}_1, ..., \mathbf{p}_N) = e^{\frac{i}{\hbar}\mathbf{a}\cdot\sum_{n=1}^{N}\mathbf{p}_n}\psi(\mathbf{p}_1, \ldots, \mathbf{p}_N). \tag{5.2.29b}$$

5.2.8 * Matematički podsetnik — osnovne osobine unitarnih i antiunitarnih operatora

Unitarni operatori u nekom Hilbert-ovom prostoru $\mathcal{H}$, pišemo ih u vidu $\hat{U}$, su neprekidni, nesingularni, linearni operatori u $\mathcal{H}$ sa sledećim najvažnijim osobinama:

$$\hat{U}^{-1} = \hat{U}^{\dagger}, \tag{5.2.30}$$

gde "†" označava adjungovanje;

$$(\hat{U}\psi, \hat{U}\chi) = (\psi, \chi),\ \forall \psi, \chi \in \mathcal{H}. \tag{5.2.31}$$

Iz (5.2.31) sledi da $\hat{U}$ održava normu svakog vektora. U Dirac-ovoj notaciji (5.2.31) glasi:

$$\langle \psi \mid \hat{U}^{\dagger}\hat{U} \mid \chi \rangle = \langle\ \psi \mid \chi\rangle. \tag{5.2.32}$$

Antiunitarni operatori u $\mathcal{H}$, njih ćemo označavati sa $\hat{U}_a$, su neprekidni, nesingularni, antilinearni operatori u $\mathcal{H}$. Ovo poslednje znači: $\hat{U}_a \sum_{k=1}^{K} \lambda_k \mid \psi_k \rangle = \sum_{k=1}^{K} \lambda_k^* \hat{U}_a \mid \psi_k \rangle$, za svaki izbor vektora $\mid \psi_k \rangle \in \mathcal{H}$, kompleksnih brojeva λ_k i celog broja K (zvezdica na λ_k označava kompleksno konjugovanje). Najvažnije osobine antiunitarnih operatora su analogne kao (5.2.30) i (5.2.31):

$$\hat{U}_a^{-1} = \hat{U}_a^\dagger, \tag{5.2.33}$$

$$(\hat{U}_a \psi, \hat{U}_a \chi) = (\psi, \chi)^*, \ \forall \psi, \chi \in \mathcal{H}. \tag{5.2.34}$$

U Dirac-ovoj notaciji (5.2.34) glasi:

$$(\langle \psi \mid \hat{U}_a^\dagger)(\hat{U}_a \mid \chi \rangle) = \langle \ \psi \mid \chi \rangle^*. \tag{5.2.35}$$

I (5.2.34) povlači da operator održava normu svakog vektora.

Što se tiče pojma adjungovanja operatora, treba se podsetiti da dok je to u slučaju linearnih operatora definisano relacijom

$$(\hat{U} \psi, \chi) = (\psi, \hat{U}^\dagger \chi), \ \forall \psi, \chi \in \mathcal{H}, \tag{5.2.36}$$

u slučaju antilinearnih operatora definicija adjungovanja glasi

$$(\hat{U}_a \psi, \chi) = (\psi, \hat{U}_a^\dagger \chi)^*, \ \forall \psi, \chi \in \mathcal{H}. \tag{5.2.37}$$

5.2.9 * Višekomponentne Lie-jeve grupe i antilinearni operatori simetrije

Da li će se određena transformacija simetrije u $\mathcal{P}(\mathcal{H}_o)$ pretvoriti u unitarni ili u antiunitarni operator u $\mathcal{H}_o$, to u stvari zavisi od fizičke prirode transformacije. Ipak postoji jedan opšti zaključak koji možemo izvesti iz teorije Lie-jevih grupa.

Kaže se da je Lie-jeve grupa *jednokomponentna* ili *povezana* ako se bilo koji element u grupi može prevesti neprekidnim variranjem Lie-jevih parametara u jedinični element u grupi. Osnovne podgrupe Galilejeve grupe T_1, T_3, $\mathrm{R}(3)$ i $\mathrm{T}_3^{(v)}$, kao i cela grupa $\mathcal{G}$, imaju ovu topološku osobinu. Kontraprimer je proširena Galilejeva grupa $\overline{\mathcal{G}}$, koja nastaje spajanjem $\mathcal{G}$ sa grupom inverzija $\{\mathcal{J}_p, \mathcal{J}_v, \mathcal{J}_p\mathcal{J}_v, I\}$. $\overline{\mathcal{G}}$ se sastoji od četiri tzv. topološke komponente[5.2.8,5.2.9]: $\mathcal{G}$, $\mathcal{J}_p\mathcal{G}$, $\mathcal{J}_v\mathcal{G}$ i $\mathcal{J}_p\mathcal{J}_v\mathcal{G}$.

U jednoj topološkoj komponenti svaki element može kontinualno da pređe u svaki drugi, a antilinearni operatori se skokovito razlikuju od linearnih (ne možemo kontinualno prevesti jedan u drugi); stoga, cela komponenta mora da se sastoji ili samo od unitarnih ili samo od antiunitarnin operatora. Pošto jednokomponentna Lie-jeva grupa sadrži identičnu transformaciju I, koja u

[5.2.8] Topološka komponenta je najveći podskup Lie-jeve grupe u kome se bilo koji element može prevesti neprekidnim variranjem Lie-jevih parametara u bilo koji drugi element. Razbijanje grupe na komponente je jedno razbijanje na klase ekvivalencije.

[5.2.9] Da podsetimo, da transformacije iz $\mathcal{G}$ nazivamo kontinualnim transformacijama (uporediti kraj od § 5.1.3), a transformacije iz ostale tri topološke komponente $\mathcal{J}_p\mathcal{G}$, $\mathcal{J}_v\mathcal{G}$ i $\mathcal{J}_p\mathcal{J}_v\mathcal{G}$ u $\overline{\mathcal{G}}$ nazivamo diskretnim. Tu se radi o kontinualnosti (ili diskretnosti) u topološko-grupnom smislu (unutar $\overline{\mathcal{G}}$). Što se tiče neprekidnosti dejstva pojedinih operatora u Hilbert-ovom prostoru, svi operatori iz $\overline{\mathcal{G}}$ su neprekidni, pošto su takvi svi unitarni i antiunitarni operatori.

$\mathcal{H}_o$ očigledno mora biti identični operator $\hat{I}$, svi operatori takve grupe su nužno unitarni. Znači svaki operator koji pripada *Galilejevoj grupi* je sigurno *unitaran*.

Kao što vidimo, samo diskretne transformacije su kandidati da se kvantuju u antiunitarne operatore, ali ni to nije nužno.

5.2.10 * Dodatak — dokaz Baker-Hausdorff-ove leme

Kao što smo rekli u paragrafu § 5.2.3, Lema iz naslova ovog paragrafa tvrdi da važi:

$$e^{\hat{\hat{B}}}\hat{A} = e^{\hat{B}}\hat{A}e^{-\hat{B}}. \tag{5.2.38a}$$

(prepisali smo (5.2.6)) kad god je LS definisana. Eksplicitno LS glasi:

$$e^{\hat{\hat{B}}}\hat{A} \stackrel{\mathrm{def}}{=} \hat{A} + [\ \hat{B}, \hat{A}\ ] + \frac{1}{2!}[\ \hat{B}, [\ \hat{B}, \hat{A}\ ]\ ] + \frac{1}{3!}[\ \hat{B}, [\ \hat{B}, [\ \hat{B}, \hat{A}\ ]\ ]\ ] + \ldots \tag{5.2.38b}$$

Radi dokaza (5.2.38a), pođimo od operatorske funkcije

$$\hat{g}(\hat{A}, \hat{B}, \alpha) \stackrel{\mathrm{def}}{=} e^{\alpha\hat{B}}\hat{A}e^{-\alpha\hat{B}}, \tag{5.2.39}$$

sa parametrom α, $-\infty < \alpha < \infty$. Lako je videti da

$$\frac{\mathrm{d}\hat{g}}{\mathrm{d}\alpha} = \hat{B}\hat{g} - \hat{g}\hat{B} = [\ \hat{B}, \hat{g}\ ], \tag{5.2.40a}$$

$$\frac{\mathrm{d}^2\hat{g}}{\mathrm{d}\alpha^2} = \hat{B}\frac{\mathrm{d}\hat{g}}{\mathrm{d}\alpha} - \frac{\mathrm{d}\hat{g}}{\mathrm{d}\alpha}\hat{B} = [\ \hat{B}, [\ \hat{B}, \hat{g}\ ]\ ], \tag{5.2.40b}$$

itd.

Razvijajući $\hat{g}$ u Taylor-ov red oko $\alpha = 0$, imajući u vidu da je $\hat{g}(\hat{A}, \hat{B}, \alpha = 0) = \hat{A}$ i koristeći se sa (5.2.40) itd., stižemo do sledećeg reda:

$$\hat{g}(\hat{A}, \hat{B}, \alpha) = \hat{A} + \alpha[\ \hat{B}, \hat{A}\ ] + \frac{\alpha^2}{2!}[\ \hat{B}, [\ \hat{B}, \hat{A}\ ]\ ] + \ldots \tag{5.2.41}$$

Iz (5.2.41) i (5.2.39) odmah sledi (5.2.38a) ako stavimo $\alpha = 1$.